مسأله ۱- سه سیستم زیر را در نظر بگیرید:

سیستم S_1: $$y(t) = x(t+2)\sin(\omega t + 2), \qquad \omega \neq 0$$

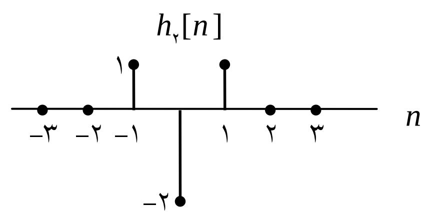
سیستم S_2: $$y[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x[n]+1)$$

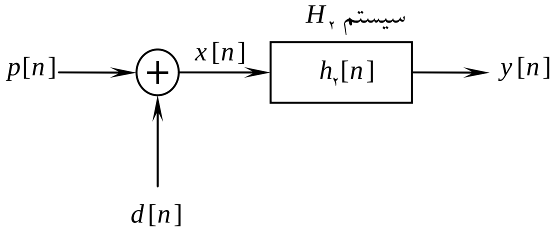
سیستم S_3: $$y[n] = \sum_{k=0}^{n-1} (x^2[k+1] - x[k])$$

در مورد خواص این سه سیستم در جدول زیر پاسخ‌های درست را مشخص کنید. **اثبات لازم نیست**.

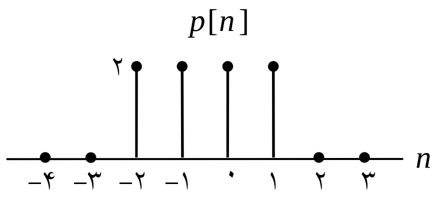
	سیستم S_1	سیستم S_2	سیستم S_3
آیا سیستم خطی است؟	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر
آیا سیستم مستقل از زمان است؟	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر
آیا سیستم علی است؟	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر
آیا سیستم پایدار است؟	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر

مسأله ۲- در شکل زیر سیستم LTI گسسته زمان H_2 با پاسخ ضربه‌ی $h_2[n]$ را در نظر بگیرید. ورودی این سیستم $x[n]$ ممکن است به سیگنال مزاحم $d[n]$ آغشته باشد (به گونه‌ای که در شکل می‌بینید).



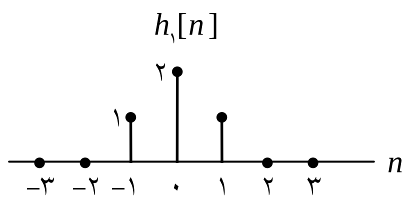


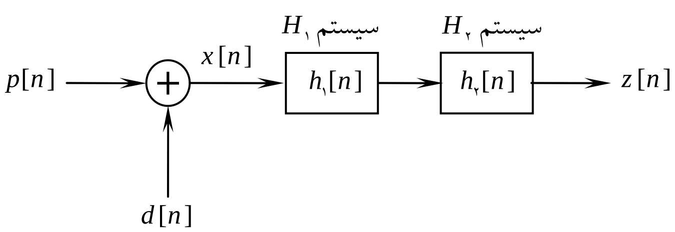
الف) پاسخ سیستم را با فرض عدم وجود سیگنال مزاحم ($d[n] \equiv 0$) و با فرض $p[n]$ به شکل زیر بدست آورید و آن را $y[n]$ بنامید و با دقت رسم و اندازه گذاری نمایید.



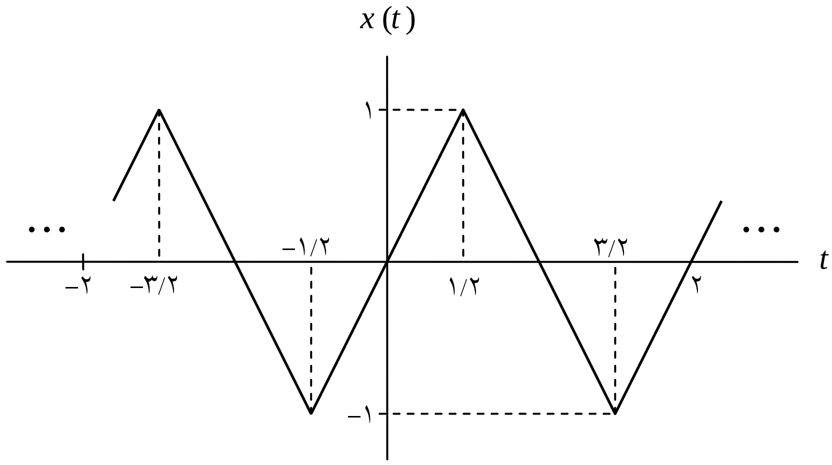
ب) پاسخ سیستم را با فرض این‌که $d[n] = -\delta[n+1]$ و $p[n]$ به همان شکل بند (الف) باشد بدست آورید و آن را $w[n]$ بنامید و با دقت رسم و اندازه گذاری نمایید.

ج) سیستم LTI دیگر H_1 با پاسخ ضربه‌ی $h_1[n]$ را به شکل زیر در ترکیب با سیستم قبلی در نظر بگیرید. پاسخ سیستم مرکب حاصل را با شرایط بند (ب) بدست آورید و آن را $z[n]$ بنامید. پاسخ را بدقت رسم و اندازه گذاری نمایید.





مسأله ۳- a_k ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال موج مثلثی $x(t)$ به شکل زیر را بدست آورید. ضرایب را تا حد ممکن ساده کنید.



مسأله ۴- اطلاعات زیر در مورد سیگنال گسسته زمان $x[n]$ در دست است.

الف) $x[n]$ حقیقی و فرد است.

ب) $x[n]$ متناوب است با دوره‌ی تناوب $N = 6$

ج) $$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}|x[n]|^2 = 10$$

د) $$\sum_{n=\langle N\rangle}(-1)^{n/3}x[n] = 6j$$

هـ) $x[1] > 2$

رابطه‌ای برای $x[n]$ به شکل سینوسی (و یا کسینوسی) بدست آورید.

مسأله ۱- سه سیستم زیر را در نظر بگیرید:

سیستم S_1: $y(t) = x(t+2)\sin(\omega t + 2), \qquad \omega \neq 0$

سیستم S_2: $y[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x[n]+1)$

سیستم S_3: $y[n] = \sum_{k=0}^{n-1} (x^2[k+1] - x[k])$

در مورد خواص این سه سیستم در جدول زیر پاسخ‌های درست را مشخص کنید. **اثبات لازم نیست.**

	سیستم S_1	سیستم S_2	سیستم S_3
آیا سیستم خطی است؟	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر
آیا سیستم مستقل از زمان است؟	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر
آیا سیستم علی است؟	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر
آیا سیستم پایدار است؟	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر	☐بله ☐ خیر

الف) خطی بودن

$$S_1: \; x_1(t) \to x_1(t+2)\sin(\omega t+2) = y_1(t) \qquad x_2(t) \to x_2(t+2)\sin(\omega t+2) = y_2(t)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \to [ax_1(t+2) + bx_2(t+2)]\sin(\omega t+2)$$

$$= ax_1(t+2)\sin(\omega t+2) + bx_2(t+2)\sin(\omega t+2) = ay_1(t) + by_2(t)$$

پس سیستم S_1 خطی است.

سیستم S_2 خطی نیست. $S_2: \qquad x[n] \equiv 0 \;\Rightarrow\; y[n] \neq 0$

سیستم S_3 خطی نیست $S_3: \qquad ax[n] \to \sum_{k=0}^{n-1} (a^2 x^2[k+1] - ax[k]) \neq ay[n]$

ب) مستقل از زمان بودن

$$S_1: \qquad x_1(t) \to x_1(t+2)\sin(\omega t+2) = y_1(t)$$

مستقل از زمان نیست. $x_1(t) = x(t-t_0) \;\Rightarrow\; y_1(t) = x(t+2-t_0)\sin(\omega t+2) \neq y(t-t_0)$

$$S_2: \qquad x_1[n] \to \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x_1[n]+1) = y_1[n]$$

مستقل از زمان نیست. $x_1[n] = x[n-n_0] \;\Rightarrow\; y_1[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x[n-n_0]+1) \neq y[n-n_0]$

$$S_3: \qquad x_1[n] \to \sum_{k=0}^{n-1} (x_1^2[k+1] - x_1[k]) = y_1[n]$$

$$x_1[n] = x[n-n_0] \;\Rightarrow\; y_1[n] = \sum_{k=0}^{n-1} (x^2[k+1-n_0] - x_1[k-n_0])$$

با تبدیل متغیر $l = k - n_0$ خواهیم داشت

مستقل از زمان نیست. $y_1[n] = \sum_{l=-n_0}^{n-1-n_0} (x^2[l+1] - x_1[l]) \neq y_1[n-n_0] = \sum_{l=0}^{n-n_0-1} (x^2[l+1] - x_1[l])$

ج) علی بودن

سیستم S_1 علی نیست چون $y(t)$ به $x(t+2)$ بستگی دارد.

سیستم S_2 علی هست چون $y[n]$ فقط به $x[n]$ بستگی دارد.

در سیستم S_3 سیگنال $y[n]$ بستگی به $x[k+1]$ دارد اما حداکثر $k=n-1$ است بنابراین خروجی به مقدار ورودی در زمان‌های بعد از n بستگی ندارد. پس سیستم علی هست.

د) پایداری

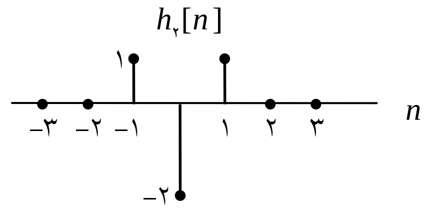
در سیستم S_1 واضح است که اگر ورودی محدود باشد خروجی هم محدود است. پس سیستم پایدار است.

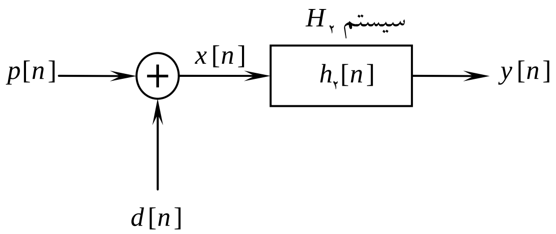
در سیستم S_2 $\quad x[n]\equiv 1 \Rightarrow y[n]=2\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \; n\to-\infty \Rightarrow y[n]\to\infty$

پس سیستم ناپایدار است، چون برای یک $x[n]$ محدود خروجی می‌تواند نامحدود شود.

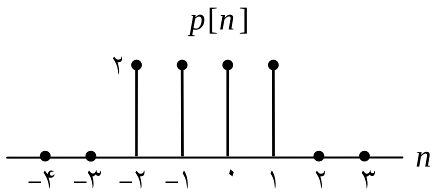
در سیستم S_3 هم با فرض $x[n]\equiv -1$ به همین نتیجه می‌رسیم. پس S_3 هم ناپایدار است.

مسأله ۲- در شکل زیر سیستم LTI گسسته زمان H_2 با پاسخ ضربه‌ی $h_2[n]$ را در نظر بگیرید. ورودی این سیستم $x[n]$ ممکن است به سیگنال مزاحم $d[n]$ آغشته باشد (به گونه‌ای که در شکل می‌بینید).





الف) پاسخ سیستم را با فرض عدم وجود سیگنال مزاحم ($d[n]\equiv 0$) و با فرض $p[n]$ به شکل زیر بدست آورید.



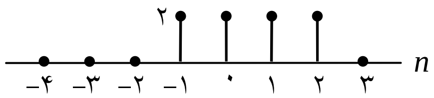
حل:

با توجه به شکل داریم $\quad h_2[n]=\delta[n-1]-2\delta[n]+\delta[n+1]$

$$y[n]=p[n]*h_2[n]=p[n-1]-2p[n]+p[n+1]$$

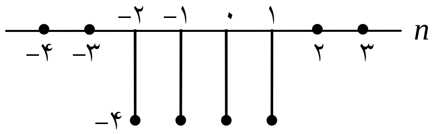
یعنی $y[n]$ مجموع سه سیگنال است به شکل‌های زیر

$p[n-1]$



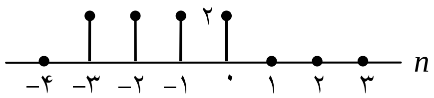
$+$

$-۲p[n]$

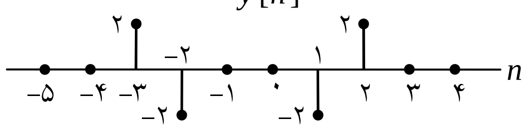


$+$

$p[n+1]$



$=y[n]$



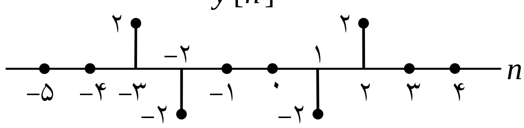
ب) پاسخ سیستم را با فرض این‌که $d[n]=-\delta[n+۱]$ و $p[n]$ به همان شکل بند (الف) باشد بدست آورید.

حل: با استفاده از روابط زیر و پاسخ قبلی:

$$
\begin{aligned}
w[n] &= (p[n]+d[n])*h_{۲}[n] \\
&= p[n]*h_{۲}[n]+d[n]*h_{۲}[n] \\
&= y[n]+h_{۲}[n]*(-\delta[n+۱]) \\
&= y[n]-h_{۲}[n+۱]
\end{aligned}
$$

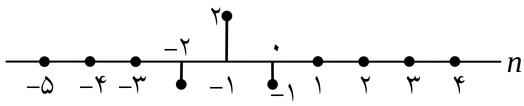
بنابراین $w[n]$ مجموع دو سیگنال $y[n]$ و $-h_{۲}[n+۱]$ خواهد بود به شکل زیر

$y[n]$

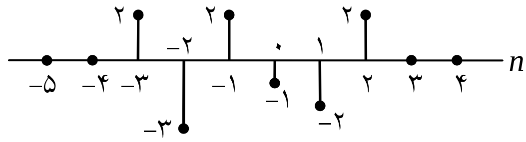


$+$

$-h_{۲}[n+۱]$

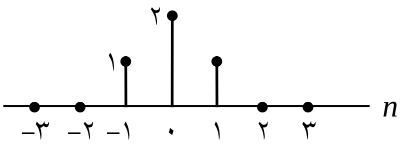


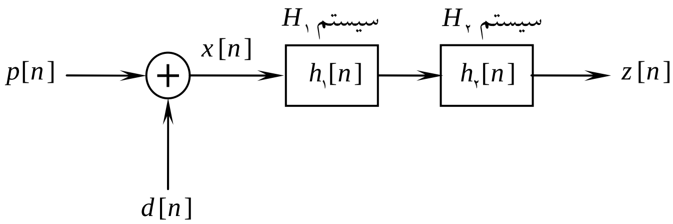
$=w[n]$



ج) سیستم دیگر $H_۱$ با پاسخ ضربه‌ی $h_۱[n]$ را به شکل زیر در ترکیب با سیستم قبلی در نظر بگیرید. پاسخ سیستم مرکب حاصل $z[n]$ را با شرایط بند (ب) بدست آورید. کلیه‌ی پاسخ‌ها را بدقت رسم و اندازه گذاری نمایید.

$h_۱[n]$



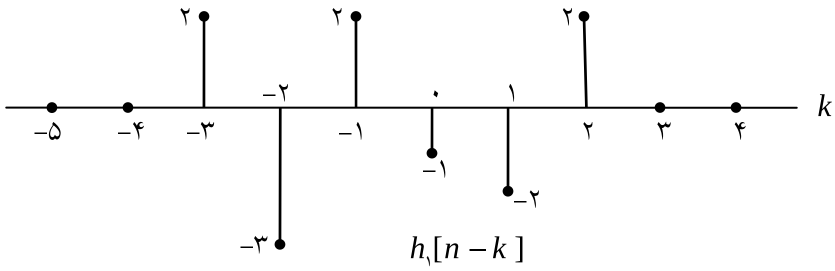


حل: داریم

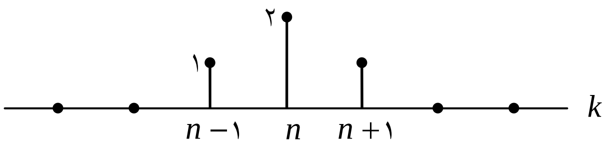
$$\begin{aligned} z[n] &= (p[n]+d[n]) * h_۱[n] * h_۲[n] \\ &= \underbrace{(p[n]+d[n]) * h_۲[n]}_{w[n]} * h_۱[n] = \\ &= w[n] * h_۱[n] \end{aligned}$$

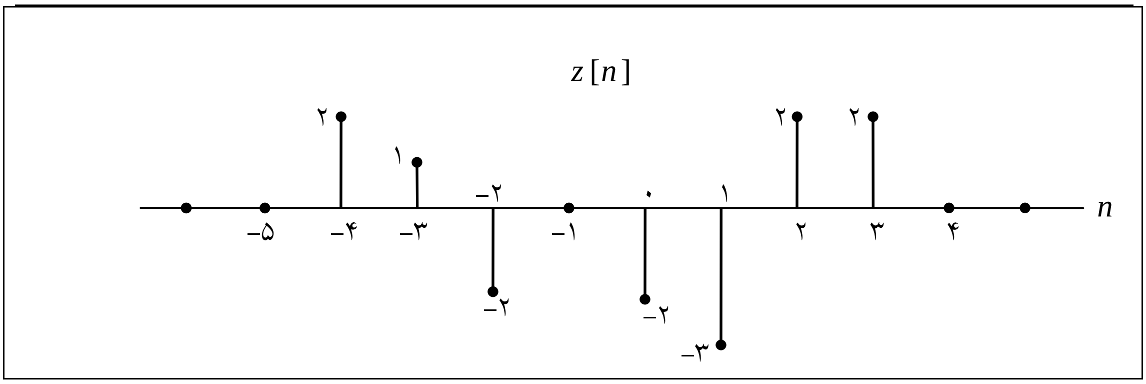
بنابر این $z[n]$ از کانولوشن دو سیگنال $w[n]$ و $h_۱[n]$ بدست می‌آید.

$w[k]$

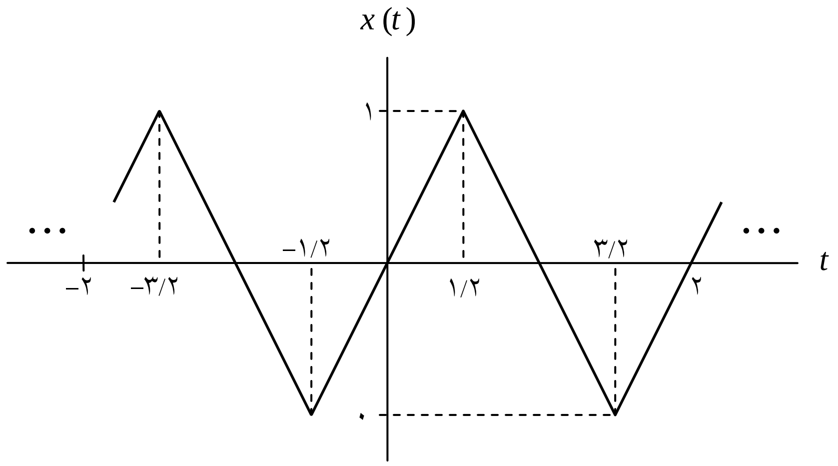


$h_۱[n-k]$

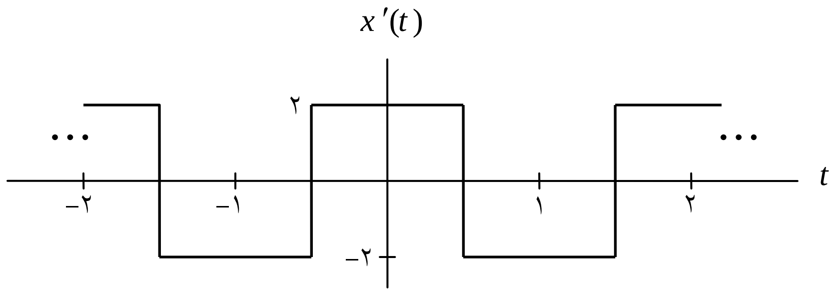


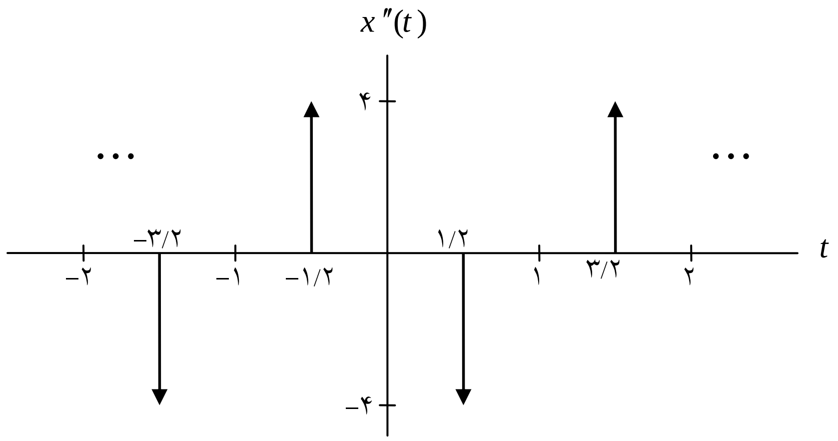


مسأله ۳- a_k ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال موج مثلثی $x(t)$ به شکل زیر را بدست آورید.



حل: از خاصیت مشتق در سری فوریه استفاده می‌کنیم. مشتق اول و دوم این سیگنال به شکل زیر هستند.





برای ضرایب سری فوریه‌ی سیگنال $x''(t)$ که آنرا b_k می‌نامیم داریم: ($\omega_0 = 2\pi/T = \pi$)

$$b_k = \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}\left[۴\delta(t+۱/۲)-۴\delta(t-۱/۲)\right]e^{-jk\pi t}dt = ۲e^{+j\frac{k\pi}{۲}} - ۲e^{-j\frac{k\pi}{۲}} = ۴j\ \sin\frac{k\pi}{۲}$$

بنابراین برای ضرایب سری فوریه‌ی $x(t)$ یعنی a_k با استفاده از خاصیت مشتق خواهیم داشت

$$\boxed{a_k = \frac{b_k}{(jk\omega_۰)^۲} \Rightarrow a_k = \frac{-۴j\ \sin\frac{k\pi}{۲}}{k^۲\pi^۲},\ k \neq ۰}$$

برای $k=۰$ واضح است که چون میانگین سیگنال $x(t)$ صفر است پس $\boxed{a_۰ = ۰}$

مسأله ۴- اطلاعات زیر در مورد سیگنال گسسته زمان $x[n]$ در دست است.

الف) $x[n]$ حقیقی و فرد است.

ب) $x[n]$ متناوب است با دوره‌ی تناوب $N=۶$

ج) $\frac{۱}{N}\sum_{n=<N>}|x[n]|^۲ = ۱۰$

د) $\sum_{n=<N>}(-۱)^{n/۳}x[n] = ۶j$

هـ) $x[۱] > ۲$

رابطه‌ای برای $x[n]$ به شکل سینوسی (و یا کسینوسی) بدست آورید.

حل:

از نکته‌ی الف نتیجه می‌شود که

به خاطر فرد بودن: $a_k = -a_{-k}$ و به خاطر حقیقی بودن: $a_k = a_{-k}^*$ بنابراین $a_k = -a_k^*$

یعنی ضرایب a_k موهومی خالص هستند، و همچنین خواهیم داشت

$$\boxed{a_۰ = ۰}$$

از نکته‌ی ب بدست می‌آید: $\omega_۰ = \frac{۲\pi}{۶} = \frac{\pi}{۳}$

به خاطر متناوب بودن ضرایب می‌توان نوشت

$$a_k = a_{k+N} \Rightarrow a_{-۳} = a_{-۳+۶} = a_۳$$

و چون $a_۳ = -a_{-۳}$ بنابراین نتیجه می‌شود

$$\boxed{a_۳ = ۰}$$

پس، از ضرایب شش‌گانه‌ی این سیگنال در یک دوره‌ی تناوب، $a_{\pm۲}$ و $a_{\pm۱}$ باقی می‌ماند که باید بدست آوریم.

از نکته‌ی ج با استفاده از قضیه‌ی پارسوال و این خاصیت که $|a_k| = |a_{-k}|$ داریم:

$$\frac{۱}{N}\sum_{n=<N>}|x[n]|^۲ = ۱۰ \Rightarrow \sum_{n=<N>}|a_k|^۲ = ۱۰ \Rightarrow ۲|a_۱|^۲ + ۲|a_۲|^۲ = ۱۰ \qquad (۱)$$

برای استفاده **از نکته‌ی د**

داریم:

$$-۱ = e^{\pm j\pi} \Rightarrow (-۱)^{n/۳} = e^{\pm j\frac{\pi}{۳}n}$$

همچنین داریم:

$$a_k = \frac{۱}{۶}\sum_{n=<۶>}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{۳}n} \Rightarrow a_{\pm۱} = \frac{۱}{۶}\sum_{n=<۶>}x[n]e^{\mp j\frac{\pi}{۳}n}$$

و بنابراین می‌توان نوشت $a_{\pm ۱} = \frac{۱}{۶} \sum_{n=<۶>} x[n](-۱)^{n/۳} = j$

پس دو ضریب دیگر به این ترتیب بدست می‌آیند:

$\boxed{a_۱ = -j\,, a_{-۱} = j \quad \text{یا} \quad a_۱ = j\,, a_{-۱} = -j}$ و در هر صورت $|a_{\pm ۱}| = ۱$

همچنین از رابطه‌ی (۱) در بالا نتیجه می‌شود

$$|a_۲| = ۲ \Rightarrow \boxed{a_۲ = -۲j\,, a_{-۲} = ۲j \quad \text{یا} \quad a_۲ = ۲j\,, a_{-۲} = -۲j}$$

بنابراین برای سیگنال $x[n]$ رابطه‌ی زیر را می‌توان نوشت.

با توجه به مقادیر ممکن $a_۱$ و $a_۲$ در بالا چهار حالت وجود دارد. به عنوان مثال برای حالتی که $a_۱ = j$ و $a_۲ = ۲j$ باشد خواهیم داشت:

$$x[n] = je^{j\frac{\pi}{۳}n} - je^{-j\frac{\pi}{۳}n} + ۲je^{j۲\frac{\pi}{۳}n} - ۲je^{-j۲\frac{\pi}{۳}n}$$

$$= j \times ۲j\ \sin(\frac{\pi}{۳}n) + ۲j \times ۲j\ \sin(۲\frac{\pi}{۳}n)$$

$$= -۲\sin(\frac{\pi}{۳}n) - ۴\sin(\frac{۲\pi}{۳}n)$$

و با در نظر گرفتن هر چهار حالت برای ضرایب $a_۱$ و $a_۲$، چهار حالت برای $x[n]$ به این شکل بدست می‌آید.

$$x[n] = \pm ۲\sin(\frac{\pi}{۳}n) \pm ۴\sin(\frac{۲\pi}{۳}n)$$

و بالاخره **از نکته‌ی ه** نتیجه می‌شود:

$$x[۱] = \pm ۲\sin(\frac{\pi}{۳}) \pm ۴\sin(\frac{۲\pi}{۳}) = \pm\sqrt{۳} \pm ۲\sqrt{۳} > ۲$$

که ناچار باید داشته باشیم

$$\boxed{x[n] = ۲\sin(\frac{\pi}{۳}n) + ۴\sin(\frac{۲\pi}{۳}n)}$$