

مسئله ۱- (۵ نمره) الف) چند رشته‌ی n حرفی متفاوت فقط با استفاده از سه حرف a, b, c می‌توان ساخت. هیچ محدودیتی از نظر تکرار یا عدم استفاده از بعضی حروف وجود ندارد. پاسخ را برحسب n بدست آورید.
 ب) (۱۰ نمره) یک رشته به تصادف از میان کلیه‌ی رشته‌های n حرفی بند الف) انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه رشته‌ی انتخابی حد اقل دو حرف یکسان در کنار هم داشته باشد چقدر است؟ احتمال را برحسب n تعیین کنید. این احتمال برای $n = 2$ چند است؟

مسئله ۲- دو قطعه‌ی A و B از یک کامپیوتر در صورتی که باهم از کار بیفتند کامپیوتر از کار خواهد افتاد. احتمال خرابی قطعه‌ی A برابر 0.01 و احتمال خرابی B مساوی 0.005 است. اما چنانچه قطعه‌ی A خراب شود احتمال خرابی B چهار برابر خواهد شد.

الف) (۵ نمره) احتمال اینکه کامپیوتر از کار بیفتد چقدر است؟
 ب) (۵ نمره) اگر قطعه‌ی B خراب شده باشد احتمال اینکه A خراب باشد چقدر است؟

مسئله ۳- (۲۵ نمره) در یک سیستم دیجیتالی کنترل از راه دور، فرستنده یکی از دو رقم صفر یا ۱ را ارسال می‌کند. این رقم که از نظر گیرنده یک مت صفر-یک (با احتمال برابر) می‌باشد و ما آن را X می‌نامیم، در بین راه بطور ناخواسته با متغیر تصادفی V نرمال $N(0, 0.5)$ جمع می‌شود. بنابراین گیرنده که به جای مت X مت $Y = X + V$ را دریافت می‌کند، باید با نظر به مقدار Y پی ببرد که فرستنده کدامیک از دو پیغام صفر یا یک را ارسال کرده است. برای این کار فرض می‌کند که اگر $Y \leq 0.5$ باشد عدد صفر و در غیر این صورت عدد ۱ ارسال شده است. احتمال خطای گیرنده (یعنی دریافت صفر به جای ۱ یا بالعکس) را بدست آورید.

مسئله ۴- (۲۰ نمره) در سیستم کنترل از راه دور مسئله‌ی ۲ فرض کنید احتمال خطای گیرنده $p = 0.16$ باشد. برای کاهش این خطای نسبتاً زیاد، فرستنده عدد مورد نظر را ۵ بار پی در پی ارسال می‌کند. یعنی یک رشته ۵ تایی رقم صفر (یا یک رشته ۵ تایی رقم ۱) می‌فرستد. گیرنده هر یک از ۵ رقم را (مستقل از رقم‌های دیگر)، با احتمال p اشتباه (و بنابراین با احتمال $q = 1 - p$ درست) دریافت می‌کند. اما از آنجا که می‌داند فرستنده ۵ پیغام یکسان ارسال کرده است تصمیم می‌گیرد که چنانچه تعداد صفرهای رشته‌ی دریافت شده بیشتر از تعداد ۱‌های آن باشد پیغام ارسالی را صفر و در غیر این صورت آن را ۱ فرض کند. مثلاً دریافت 01001 را به منزله‌ی ارسال عدد صفر از سوی فرستنده تلقی می‌کند ولی 01101 را به منزله‌ی عدد ۱ می‌شناسد. احتمال خطای گیرنده را محاسبه کنید.

راهنمایی: دقت کنید که با این روش چه صفر ارسال شود چه ۱، خطا در صورتی رخ می‌دهد که از میان ۵ رقم دریافت شده حد اقل ۳ رقم اشتباه دریافت شود.

مسئله ۵- متغیر تصادفی X نرمال $N(1, 1)$ و متغیر تصادفی Y به فرم

$$Y = (X - 1)^2$$

مفروض است.

الف) (۱۵ نمره) تابع توزیع مت Y را برحسب تابع توزیع مت X بدست آورید.
 ب) (۱۰ نمره) تابع $f_Y(y)$ را برحسب y برای تمام مقادیر $-\infty < y < +\infty$ مشخص کنید.
 ج) (۵ نمره) میانگین مت Y را بدست آورید.