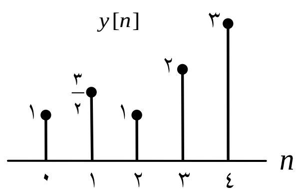
**مسأله** ۱- یک سیستم **علّی** گسسته زمان LTI با پاسخ ضربه‌ی $h[n]$ مفروض است. ورودی این سیستم سیگنال

$$x[n]=\left(\frac{۱}{۲}\right)^n u[n]$$

است و خروجی آن $y[n]$ در بازه‌ی زمانی $۰\le n \le ۴$ معلوم و به شکل زیر است ($y[n]$ در سایر زمان‌ها مشخص نیست). مقدار $h[۱]$ را بدست آورید.

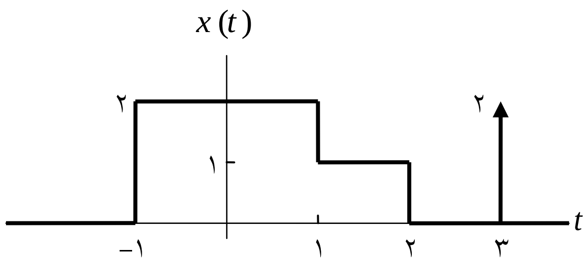



**مسأله** ۲- خروجی یک سیستم LTI پیوسته زمان در هر لحظه برابر است با میانگین سیگنال ورودی در بازه‌ی زمانی یک ثانیه‌ی اخیر، یعنی

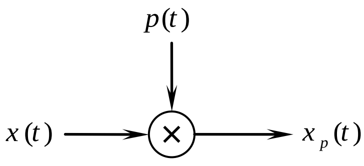
$$y(t)=\int_{t-۱}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

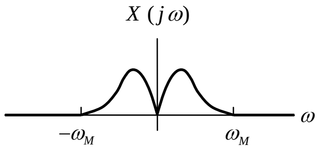
**الف)** پاسخ ضربه‌ی این سیستم را معین کنید.

**ب)** پاسخ این سیستم به ورودی $x(t)$ به شکل زیر را رسم و به دقت اندازه گذاری نمایید.



**مسأله ۳**- در یک سیستم نمونه بردار به جای استفاده از قطار ضربه، از قطار پالس $p(t)$ استفاده میشود. نمودارهای قطار پالس $p(t)$، سیگنال ورودی $x(t)$، و سیگنال خروجی $x_p(t)$، در پایین همین صفحه رسم شده است، . بلوک دیاگرام سیستم و $X(j\omega)$ طیف سیگنال ورودی به شکل زیر است.



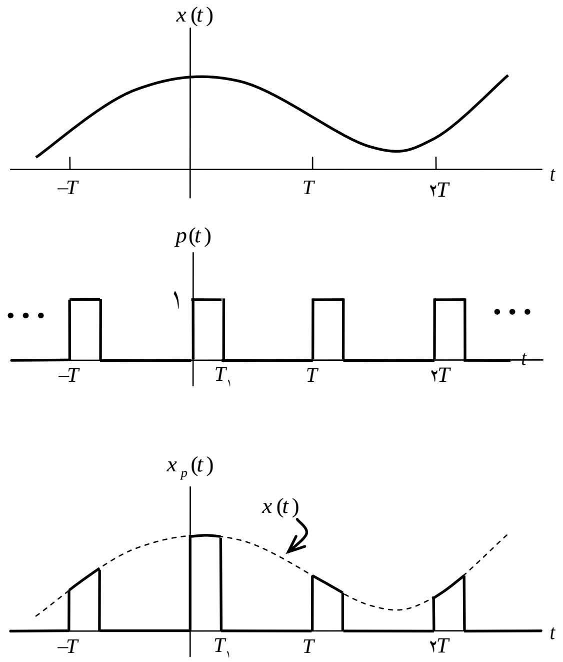

**الف)** $P(j\omega)$ تبدیل فوریه‌ی قطار پالس (موج مربعی نشان داده شده در شکل) را بدست آورید.

**ب)** $X_p(j\omega)$ طیف سیگنال خروجی نمونه بردار، یعنی تبدیل فوریه‌ی $x_p(t)=x(t)p(t)$، را برحسب $X(j\omega)$ بدست آورید.

**ج)** طیف سیگنال خروجی ($\left|X_p(j\omega)\right|$) را با فرض $T=۴T_۱$ و $\omega_s=\frac{۲\pi}{T}$ در بازه‌ی $|\omega|\le ۳\omega_s$ رسم کنید. نمودار را با دقت رسم و اندازه گذاری نمایید.

**د)** حدود $\omega_s=\frac{۲\pi}{T}$ فرکانس نمونه برداری را برای آن که بتوان $x(t)$ را با استفاده از نمونه‌هایش، $x_p(t)$، بدست آورد تعیین کنید.

**ه)** مشخصه‌ی فرکانسی سیستمی را که ورودی آن $x_p(t)$ و خروجی آن $x(t)$ باشد تعیین کنید.



**مسأله ٤**- سیستم LTI توصیف شده با معادله‌ی تفاضلی زیر را در نظر بگیرید.

$$y[n]+\frac{۱}{۲}y[n-۱]=x[n]$$

**الف)** پاسخ فرکانسی این سیستم $H(e^{j\omega})$ را بیابید.

**ب)** پاسخ سیستم به ورودی $x_۱[n]=\delta[n]-\frac{۱}{۲}\delta[n-۱]$ را پیدا کنید.

**ج)** پاسخ سیستم به ورودی $x_۲[n]=\delta[n]+\frac{۱}{۲}\delta[n-۱]$ را بدست آورید.

**د)** وارون این سیستم در حوزه‌ی زمان و فرکانس ($h_۱[n]$ و $H_۱(e^{j\omega})$) را معین کنید. آیا وارون آن هم علّی است؟ چرا؟

**هـ)** با رسم اندازه‌ی طیف سیستم، یعنی $\left|H(e^{j\omega})\right|$ معین کنید که این سیستم چه نوع فیلتری است.

**و)** این فیلتر به سیگنال $(-۱)^n$ چگونه پاسخ می‌دهد؟

**مسأله ٥**- سیگنال $x[n]$ خروجی یک سیستم LTI به ازای ورودی $s[n]$ است. این سیستم با معادله‌ی تفاضلی زیر توصیف شده است.

$$x[n]=s[n]-r^۸s[n-۸],\qquad r>۰$$

**الف)** تابع تبدیل سیستم یعنی

$$H_۱(z)=\frac{X(z)}{S(z)}$$

را بدست آورید. قطب‌ها و صفرهای آن را روی صفحه‌ی $z$ رسم کرده، ناحیه‌ی همگرایی آن را مشخص کنید.

**ب)** می‌خواهیم با استفاده از یک سیستم LTI دیگر سیگنال ورودی سیستم فوق $s[n]$ را از روی خروجی آن $x[n]$ بازسازی کنیم. در سیستم جدید که وارون سیستم قبلی می‌شود با فرض $y[n]=s[n]$ خواهیم داشت:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

تمام صفرها و قطب‌های این سیستم را در صفحه‌ی $z$ مشخص کنید. آیا این سیستم منحصر به فرد است؟

**ج)** در مورد علّی و پایدار بودن سیستم بند (**الف**) و سیستم یا سیستم‌هایی که در بند (**ب**) بدست می‌آید بازای مقادیر مختلف $r>۰$ بحث کنید.

# حل مسائل امتحان پایان ترم تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

**حل مسأله‌ی ۱:**

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

چون سیستم علّی است، پس $h[n]=۰$ برای $n<۰$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$y[n]=\sum_{k=۰}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

$$=\sum_{k=۰}^{+\infty} h[k]\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-k} u[n-k]$$

با توجه به رابطه‌ی $u[n-k]$ که به ازای $k\le n$ مساوی ۱ و در غیر این صورت صفر است خواهیم داشت

$$y[n]=\sum_{k=۰}^{n} h[k]\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-k} \qquad n\ge ۰$$

$y[n]$ را برای دو مقدار $n=۰$ و $n=۱$ از رابطه‌ی بالا محاسبه می‌کنیم

$$y[۰]=h[۰]$$

$$y[۱]=h[۰]\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱-۰}+h[۱]\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱-۱}=\frac{۱}{۲}h[۰]+h[۱]$$

و با توجه به نمودار $y[n]$ در بالا داریم $y[۰]=۱$ و $y[۱]=\frac{۳}{۲}$

و در نتیجه خواهیم داشت

$$h[۱]=y[۱]-\frac{۱}{۲}h[۰] \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{h[۱]=۱}$$

**حل مسأله‌ی ۲:**

**الف)** پاسخ ضربه‌ی سیستم عبارت است از $y(t)$ اگر داشته باشیم $x(t)=\delta(t)$، پس

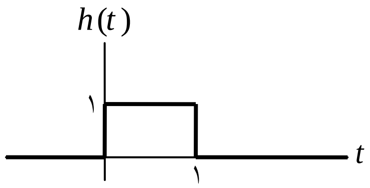
$$h(t)=\int_{t-۱}^{t}\delta(\tau)\,d\tau$$

با توجه به اینکه تابع ضربه فقط در صفر مقدار دارد و سطح زیر آن ۱ است، خواهیم داشت

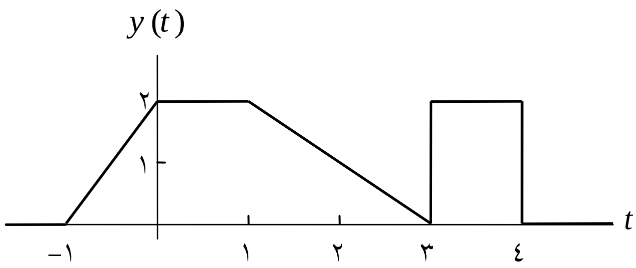
$$h(t)=۱ \qquad t-۱<۰<t \qquad \Rightarrow \qquad ۰<t<۱$$

$$h(t)=۰ \qquad t<۰ \qquad \text{و} \qquad t>۱$$

بنابراین پاسخ ضربه‌ی سیستم به شکل زیر است.




**ب)** برای حل این قسمت کافی است انتگرال داده شده را که سطح زیر سیگنال $x(t)$ از $t-۱$ تا $t$ می‌باشد برای مقادیر مختلف $t$ از روی شکل محاسبه کنیم. نتیجه به شکل پی‌آیند خواهد بود.




**حل مسأله‌ی ۳:**

**الف)** برای محاسبه‌ی $P(j\omega)$ ابتدا باید ضرایب سری فوریه‌ی $p(t)$ را بدست آوریم. با توجه به جدول سری فوریه برای یک موج مربعی که تقارن زوج داشته باشد داریم

$$\prod\left(\frac{t}{T_1}\right) \xleftrightarrow{FS} \frac{\sin k\omega_0 \frac{T_1}{2}}{k\pi}$$

سیگنال $p(t)$ مورد نظر به اندازه‌ی $T_1/2$ شیفت به سمت راست دارد. بنابراین

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 \frac{T_1}{2}}{k\pi} e^{-jk\omega_0 \frac{T_1}{2}} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad \Rightarrow$$

$$a_k = \frac{\sin \frac{k\pi T_1}{T}}{k\pi} e^{-j\frac{k\pi T_1}{T}} \qquad a_0 = \frac{T_1}{T}$$

با توجه به رابطه‌ی تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های متناوب با ضرایب سری فوریه‌ی آن‌ها

$$P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

خواهیم داشت:

$$\boxed{P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin \frac{k\pi T_1}{T}}{k} e^{-j\frac{k\pi T_1}{T}} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)}$$

**ب)** طیف سیگنال خروجی نمونه بردار عبارتست از

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

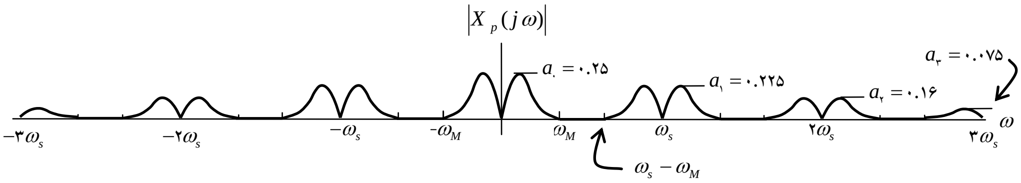
$$= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X\left[j\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)\right]$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\boxed{X_p(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{k\pi T_1}{T}}{k\pi} e^{-j\frac{k\pi T_1}{T}} X\left[j\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)\right]}$$

**ج)** با توجه به رابطه‌ی بالا ملاحظه می‌شود که طیف خروجی نمونه بردار عبارت است از تکرار $X(j\omega)$ روی محور $\omega$ به فاصله‌ی $\frac{2\pi}{T}$ و با وزن $a_k$ برای هر تکرار $k$ ام. اگر $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ را به اندازه‌ی کافی بزرگ بگیریم شکل زیر برای اندازه‌ی طیف مورد نظر حاصل می‌شود.

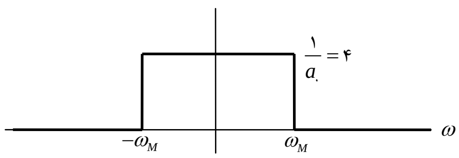



**د)** با توجه به شکل طیف، پیداست که برای اینکه بتوان $X(j\omega)$ را از $X_p(j\omega)$ بدست آورد کافی است داشته باشیم

$$\omega_s - \omega_M > \omega_M \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega_s > 2\omega_M}$$

که در حقیقت همان شرط نایکویست است.

ه) باز با توجه به شکل طیف خروجی واضح است که اگر سیگنال $x_p(t)$ از فیلتر پایین گذر زیر بگذرد همان سیگنال $x(t)$ بدست خواهد آمد.




**حل مسأله‌ی ٤:**

**الف)** با تبدیل فوریه از طرفین معادله‌ی تفاضلی داریم

$$Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2} Y(e^{j\omega}) e^{-j\omega} = X(e^{j\omega})$$

و بنابراین

$$Y(e^{j\omega})(1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

پس تابع تبدیل سیستم عبارت است از

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}}}$$

**ب)** برای بدست آوردن پاسخ سیستم از تحلیل در حوزه‌ی فرکانس استفاده می‌کنیم.

$$X_1(e^{j\omega}) = 1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega} \qquad Y_1(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X_1(e^{j\omega})$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}} = 1 - \frac{e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

با استفاده از جدول تبدیل فوریه و خواص آن خواهیم داشت:

$$\boxed{y_1[n]=\delta[n]-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]}$$

**ج)** باز هم با تحلیل در حوزه‌ی فرکانس خواهیم داشت:

$$X_2(e^{j\omega})=1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\qquad Y_2(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})=1$$

پس

$$\boxed{Y_2(e^{j\omega})=1\qquad\Rightarrow\qquad y_2[n]=\delta[n]}$$

**د)** وارون این سیستم در حوزه‌ی فرکانس عبارت است از

$$H_1(e^{j\omega})=\frac{1}{H(e^{j\omega})}=1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}$$

در نتیجه داریم

$$\boxed{H_1(e^{j\omega})=1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\qquad\Rightarrow\qquad h_1[n]=\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]}$$

از پاسخ ضربه‌ی وارون سیستم $h_1[n]$ پیداست که علّی است. زیرا: $h_1[n]=0\qquad n<0$

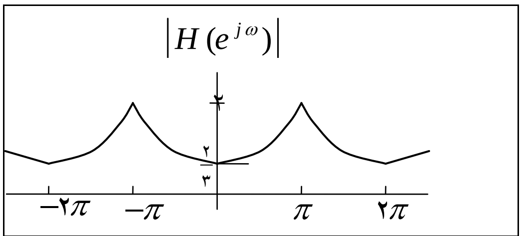
**ه(** با توجه به مشخصه‌ی فرکانسی سیستم $H(e^{j\omega})$ که در بند (الف) بدست آمد، داریم

$$\left|H(e^{j\omega})\right|^2=H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)}=\frac{1}{\frac{5}{4}+\cos\omega}$$

و به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\boxed{\left|H(e^{j\omega})\right|=\frac{2}{\sqrt{5+4\cos\omega}}}$$

که نمودار آن به شکل زیر خواهد بود.




این نمودار نشان می‌دهد که سیستم یک $\boxed{\text{فیلتر بالاگذر}}$ است.

**و)** در پاسخ سیستم‌های LTI به دنباله‌های نمایی داشتیم که

$$e^{j\omega_0 n}\rightarrow H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$$

و چون $(-1)^n=e^{j\pi n}$ پس

$$(-1)^n\rightarrow H(e^{j\pi})(-1)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{j\pi}}(-1)^n\qquad\Rightarrow$$

$$\boxed{(-1)^n\rightarrow 2(-1)^n}$$

یعنی این سیستم دنباله‌ی $(-1)^n$ را دو برابر می‌کند.

**حل مسأله‌ی ۵:**

**الف)** با گرفتن تبدیل $z$ از طرفین معادله‌ی تفاضلی داریم

$$X(z) = S(z) - r^8 S(z) z^{-8} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{H(z) = \frac{X(z)}{S(z)} = 1 - r^8 z^{-8}}$$

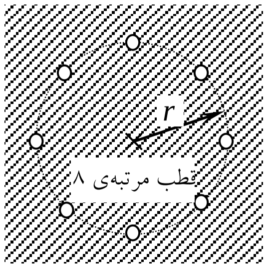
برای محاسبه‌ی صفرها داریم

$$1 - r^8 z^{-8} = 0 \quad \Rightarrow \quad (rz^{-1})^8 = 1 = e^{j2k\pi} \quad \Rightarrow$$

$$rz^{-1} = e^{j\frac{k\pi}{4}} \quad \Rightarrow \quad z = re^{-j\frac{k\pi}{4}}$$

بنابر این $H(z)$ هشت صفر دارد که اندازه‌ی همه‌ی آن‌ها $r$ است و همگی روی یک دایره‌ی به شعاع $r$ قرار می‌گیرند. ضمناً عبارت $z^{-8}$ در تابع تبدیل نشان می‌دهد که این سیستم در مبدأ هشت قطب دارد و یا به عبارت دیگر یک قطب مرتبه‌ی ۸ در مبدأ دارد. ناحیه‌ی همگرایی تمامی صفحه است باستثنای مبدأ.

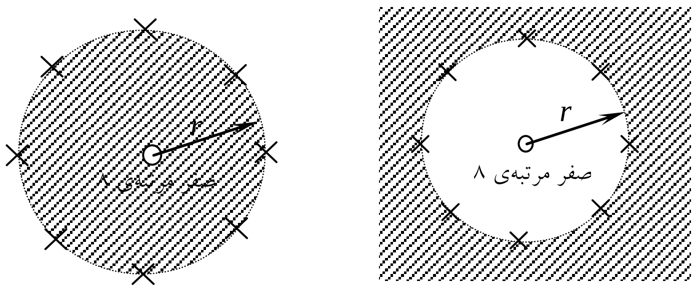
آرایش صفرها و قطب‌ها و ناحیه‌ی همگرایی به شکل زیر است.




**ب)** در سیستم وارون داریم

$$H(z) = \frac{1}{1 - r^8 z^{-8}}$$

بنابراین جای صفرها و قطب‌ها معکوس می‌شود، به شکل زیر. ناحیه‌ی همگرایی به یکی از دو شکل نشان داده شده می‌تواند باشد. بنابراین دو سیستم معکوس می‌توان برای این سیستم تعریف کرد.




سیستم راست‌گرا — سیستم چپ‌گرا

**ج)** در سیستم بند (الف) چون ناحیه‌ی همگرایی آن تمام صفحه است، پس هم علّی و هم پایدار است.

در مورد دو سیستم بند (ب) بستگی به مقدار $r$ دارد:

اگر $r > 1$ باشد، سیستم اول به دلیل اینکه راست‌گرا است و قطب در بی‌نهایت ندارد، علّی است. اما چون دایره‌ی به شعاع واحد در داخل ناحیه‌ی همگرایی قرار ندارد، سیستم ناپایدار است. روشن است که سیستم دوم پایدار است اما علّی نیست (بلکه ضد علّی است).

اگر $r < 1$ باشد سیستم اول (راست گرا) هم علّی است و هم پایدار و سیستم دوم نه علّی است و نه پایدار.