

توجه: ۱- تعداد سؤالات ۵ عدد است. دو طرف برگه‌ی سؤالات را کنترل کنید.
 ۲- کلیه‌ی پاسخ‌ها را تمیز و خوانا در برگه‌های پاسخنامه بنویسید.
 ۳- کلیه‌ی پاسخ‌ها باید همراه با استدلال باشد. آنچه در کتاب یا کلاس اثبات شده، نیازی به اثبات ندارد.
 ۴- نام خود را روی برگه‌ی سؤالات و پیش‌نویس‌ها بنویسید و در پایان امتحان تحویل دهید.
 موفق باشید.

مسئله ۱- (۱۵ نمره) دوازده صندلی از شماره‌ی ۱ تا ۱۲ شماره گذاری شده است. ۴ دختر و ۸ پسر به تصادف روی صندلی‌ها می‌نشینند.

الف) (۴ نمره) احتمال اینکه صندلی شماره‌ی ۷ توسط یک پسر اشغال شود چقدر است؟

ب) (۶ نمره) احتمال اینکه شماره‌ی صندلی همه‌ی دخترها فرد باشد چقدر است؟

ج) (۵ نمره) احتمال رویداد بند (الف) به شرط اینکه بدانیم رویداد بند (ب) رخ داده است چقدر است؟

مسئله ۲- (۱۵ نمره) لحظه‌ی از کار افتادن (عمر) یک سیستم در حال کار، متغیر تصادفی X با تابع توزیع $F(x)$ فرض

می‌شود، که در آن ثابت λ را نرخ خرابی سیستم می‌نامند. (لحظه‌ی شروع به کار سیستم لحظه‌ی صفر فرض می‌شود).

الف) (۶ نمره) احتمال اینکه سیستم تا لحظه‌ی t از کار نیفتد را برحسب تابع توزیع مت X بدست آورید. این احتمال را که

تابعی از t می‌باشد، قابلیت اعتماد سیستم می‌نامند و آن را با تابع $R(t)$ نشان می‌دهند.

ب) (۵ نمره) قابلیت اعتماد سیستم را با فرض این که تابع چگالی عمر سیستم به فرم زیر باشد بدست آورید.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} U(x)$$

ج) (۴ نمره) با فرض $\lambda = 0.01$ به ازای چه مقداری از t قابلیت اعتماد سیستم ۹۰٪ است.

مسئله ۳- (۳۲ نمره) متغیر تصادفی X را برابر نمره‌ی کوئیز درس احتمال فرض کنید. این کوئیز ۵ سؤال چهار گزینه‌ای

دارد و نمره آن برحسب تعداد سؤال‌هایی که درست پاسخ داده شده، از جدول زیر محاسبه میشود:

۰	۱	۲	۳	۴	۵	تعداد پاسخهای درست
۰	۰	۱	۲	۳	۴	نمره کوئیز

فرض کنید دانشجویی که درس را نخوانده است همه سؤالات را به تصادف پاسخ دهد. به این ترتیب متغیر تصادفی X یکی

از پنج عدد صحیح $k = 0, 1, 2, 3, 4$ را می‌پذیرد.

الف) (۱۲ نمره) تابع چگالی احتمال X ، $f_x(k) = P\{X = k\}$ را بدست آورید و رسم کنید.

ب) (۶ نمره) تابع توزیع این متغیر تصادفی را محاسبه و رسم کنید.

ج) (۴ نمره) احتمال اینکه دانشجو نمره قبولی (۲ یا بیشتر) بگیرد چقدر است؟

د) (۵ نمره) نمره مورد انتظار دانشجو، $E\{X\}$ چند است؟

ه) (۵ نمره) اگر در یک کلاس ۴۲ نفری هیچ دانشجویی درس را نخوانده باشد و همه به تصادف به کوئیز پاسخ دهند!

احتمال اینکه حد اقل یک نفر نمره ۴ بگیرد چقدر است؟

مسئله ۴- (۱۸ نمره) متغیر تصادفی X یکنواخت در بازه‌ی $(-\pi/2, \pi/2)$ و $Y = \sin X$ مفروض است.

الف) (۱۲ نمره) میانگین، واریانس و کوواریانس X و Y و $(\mu_{xy}, \sigma_y^2, \sigma_x^2, \eta_y, \eta_x)$ را محاسبه کنید.

ب) (۶ نمره) معادله‌ی خط انطباق (رگرسیون) Y بر X را بدست آورید.

مسأله ۵- (۲۰ نمره) تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی X و Y به فرم زیر داده شده است.

$$f(x, y) = e^{-(x+y)} U(x)U(y)$$

الف) (۴ نمره) نشان دهید که X و Y مستقل از یکدیگرند.

ب) (۸ نمره) توابع توزیع مرزی و توأم X و Y را بدست آورید.

ج) (۸ نمره) تابع چگالی مت $Z = \min(X, Y)$ را بیابید.